Az irigy törpe és a bölcsesség köve.

December 23

Hol volt, hol nem volt, az Óperenciás tengeren is túl, a törpék országában, ott is a törpekirály udvarában élt egyszer egy irigy törpe. Ennek az irigy törpének nagyon tetszettek a színes kövek. Össze is gyűjtött belőlük rengeteget, naphosszat rakosgatta őket, s bár tömérdek színes köve volt, meg nem engedte volna senkinek sem, hogy féltett kincseihez akár egy ujjal is hozzáérjen. Történt egyszer, hogy egy Merlin nevű vándor matematikus vetődött a királyi udvarba. Szörnyen nagy tudományával még a királyt is ámulatba ejtette. Meg is kérte őt a király, maradjon még az országában, és tanítsa törpe alattvalóit a matematika tudományára. Igent mondott Merlin a szíves marasztalásra, és tüstént meg is kezdte a tanítást. A törpéknek nagyon tetszettek Merlin órái. Ott tolongtak a tudós előadásain mind egy szálig – kivéve az irigy törpét, aki folyton csak a színes köveit rakosgatta. Egyszer aztán észrevette, hogy társai nem jönnek hozzá többet, és nem kérlelik, mint azelőtt, amikor még mindenki az ő színes köveivel szeretett volna játszani, persze hiába. Rájött, hogy a többiek mostanában mind Merlint hallgatják. Furdalni kezdte a kíváncsiság, ugyan mi lehet olyan nagyon érdekes azokon az előadásokon? Elhatározta, hogy márpedig ő utánajár ennek. Így is történt. Egy szép napon besurrant az irigy törpe is a terembe, ahol Merlin az előadásokat tartotta. Hát látja ám, hogy a katedrán Merlin előtt egy csodálatosan szép, ragyogó kristály hever. Padszomszédjától megtudta, hogy a gyönyörű kristály a Bölcsesség köve, amitől Merlin soha egy percre sem válik meg, és mások is csak előadásai közben láthatják. Olyan csodálatos volt a kristály, hogy az irigy törpe alig tudta a szemét levenni róla, és nem is figyelt Merlin előadására.

Merlin éppen a számosságokról beszélt. Arról, hogy a számlálás tulajdonképpen egy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés objektumok és egy számosság elemei között. Az irigy törpe ezt nem nagyon értette, de amit felfogott belőle, az arra késztette, hogy megszámlálja színes köveit. Eltervezte, hogy számokat ír a kövekre, s rögtön hozzá is látott. Néhány nap múlva – bár igen gyorsan írt, és már a 3 429 200 728-as számig jutott el – úgy látta, hogy még ugyanannyi kő vár megszámlálásra, mint kezdetben. Mivel a megszámlálás ötlete Merlin előadásán merült fel, elhatározta, hogy Merlintől kér tanácsot, miként fejezhetné be a kövek megszámlálását. Merlin tudta, hogy a törpe nagyon gyors: tetszőlegesen rövid idő alatt tud egy-egy követ megszámozni. Azt tanácsolta tehát a törpének, hogy minden egyes újabb követ pontosan fele annyi idő alatt számozzon meg, mint a megelőzőt. Az irigy törpe azt válaszolta, hogy megpróbálja követni a tanácsot, és egyúttal felajánlotta Merlinnek az addig megszámozott köveit cserébe a Bölcsesség köveért. Ezt nem kis áldozatnak érezte, de nagyon szerette volna megkapni a

kristályt. Ugyancsak meglepődött és meg is mérgesedett, amikor Merlin visszautasította az ajánlatot. Rosszkedvűen ment vissza a számlálást befejezni. Merlin tanácsát követve az irigy törpe egy másodperc alatt számozta meg a soron levő követ, fél másodperc alatt a következőt, s az utána következőt pedig negyed másodperc alatt, és így tovább. Meglepetéssel tapasztalta, hogy pontosan két másodperc alatt fejezte be a munkát, és hogy az összes számot felhasználta az eljárásban. Mivel azonban még mindig nem tudta, hány színes köve is van valójában, visszament Merlinhez, aki azt mondta: – Ha jártál volna az előadásaimra, akkor most tudnád: színes köveid száma„alef-null". Az irigy törpe ismét felajánlotta összes színes kövét cserébe a Bölcsesség kövéért, ami után egyre erősebben sóvárgott. Merlin azonban most is visszautasította az ajánlatot, mondván: A Bölcsesség követ csak bölcsesség révén lehet megszerezni. Azt tanácsolta a törpének, járjon inkább az előadásokra. A válasz fölpaprikázta az irigy törpét, s duzzogva ment vissza a szobájába. Csak egy icipicit vidította föl, hogy irigységében nemet mondhatott egy törpe kérésére, aki csak egyetlen követ szeretett volna kérni tőle. Pedig ez a törpe azzal érvelt, hogy semmit sem vesztene, ha egy követ elajándékozna, hiszen akkor is ugyanannyi maradna neki, mint azelőtt volt. (Ez a törpe természetesen járt Merlin előadásaira.) Néhány nap múlva Merlin váratlanul megjelent az irigy törpe szobájában, kezében a Bölcsesség kövével. – Azért jöttem – mondta –, hogy üzletet kössek veled. Két feladatot adok, és eldöntheted, végrehajtod-e azokat, vagy sem. Ha pontosan elvégzed mindkettőt, akkor elcserélem a kristályt egyetlen színes kövedért. A törpe rövid gondolkodás után úgy vélte, semmit sem veszthet, hiszen bármikor visszautasíthatja a feladatok végrehajtását. Megkérdezte tehát, mik volnának azok. – Először az első feladatot mondom – válaszolta Merlin. – Itt van egy nagy, és alef-null darab kis doboz. Ezek ugyanúgy meg vannak számozva, mint a színes köveid. Most szépen beleteszem a köveket a nagy dobozba, majd a dobozt megfordítom, hogy te is sorrendben vehesd ki a köveket. Így is tett. Amint végzett, becsukta a nagy dobozt, és a másik végén nyitotta ki, ahol az egyes számú kő tűnt elő. – Most jön az első feladat. Egy perccel tíz óra előtt kiveszed az egyes számú követ a nagy dobozból, és az egyes számú kis dobozba teszed. Fél perccel tíz óra előtt veszed a kettes számú követ a nagy dobozból, beteszed az egyes dobozba, majd innen a *nagyobb* sorszámú követ átteszed a kettes dobozba. Erre az egész második műveletre negyed perced van. Negyed perccel tíz előtt kiveszed a hármas számú követ a nagy dobozból, beleteszed az egyes dobozba, majd ebből a *nagyobb* sorszámú követ átteszed a kettes dobozba, majd ebből a *nagyobb* sorszámút a hármas dobozba. Minderre egynyolcad perced van. Ezt az eljárást kell folytatnod – az egymás utáni lépésekre felhasznált időt mindig a felére csökkentve – egészen tíz óráig, amikor készen leszel. Meg akarod próbálni a feladatot?

A törpe gyorsan végiggondolta: Az egyes követ az egyes dobozba; a kettes követ az egyes dobozba, majd a kettes követ a kettes dobozba; a hármas követ az egyes dobozba, majd a hármas követ a kettes dobozba, s végül a hármas követ a hármas dobozba. Ez ugyanaz, mintha egyszerűen a hármas dobozba tenném a hármas követ. Miért ilyen bonyolultak az utasítások? Mindez olyan egyszerűnek tűnt, hogy egy pillanatra azon is eltűnődött, nincs-e valami csel az ajánlatban. De ismét eszébe ötlött, semmi veszteni valója nincs, még akkor sem, ha a feladatot rosszul hajtaná végre. Így aztán az irigy törpe úgy döntött, vállalkozik a feladat végrehajtására. Merlin nagy zsebórát húzott elő, és egy perccel tíz előtt megadta a jelet a kezdésre. Az irigy törpe lázasan dolgozott, tette-vette a köveket, egészen addig, míg az óra tízet nem ütött. Ekkor megnézte a dobozokat, és – várakozásának megfelelően – az egyes számot viselő kő az egyes dobozban, a kettes kő a kettes dobozban, a hármas kő a hármas dobozban volt. Sőt, a nagy doboz üres lett, és minden egyes színes kő az ugyanolyan sorszámot viselő kis dobozba került. Egy kicsit meglepődött ugyan, hogy a nagy doboz kiürült, de Merlin elmagyarázta, hogy minden kőnek volt egy sorszáma, és az n-edik követ $1/2^n$ perccel 10 óra előtt kivette a nagy dobozból, ezért tíz órára mindegyik kőnek ki kellett kerülnie onnan.A törpe nagyon boldog volt, amikor Merlin elismerte, hogy az első feladatot pontosan hajtotta végre. Megkérdezte, mi lenne a második feladat. Tulajdonképpen valami olyasmit várt, amit nem akarna vagy nem tudna végrehajtani. Ezért igencsak meglepődött Merlin szavain: – A másik feladatod ugyanúgy indul, mint az első – s Merlin eközben ismét beletette a köveket a nagy dobozba – de az egyik lépés megváltozik. Jól figyelj! Egy perccel tizenegy előtt kiveszed az egyes követ a nagy dobozból, és beleteszed az egyes számú kis dobozba. Fél perccel tizenegy előtt kiveszed a kettes követ, és beleteszed az egyes dobozba, majd veszed a *kisebb* sorszámú követ, és átteszed a kettes dobozba. Negyed perccel tizenegy előtt kiveszed a hármas követ a nagy dobozból, és beleteszed az egyes dobozba, ezután onnan a *kisebb* sorszámút átteszed a kettes dobozba, ezután onnan a *kisebb* sorszámút a hármas dobozba. Ezt egészen tizenegy óráig folytatod, s akkor abbahagyod. Meg akarod próbálni ezt a feladatot is? A törpe ismét töprengett egy keveset. – Az utasítások ugyanazok, mint az előbb, csak most mindegyik dobozból a kisebb sorszámút kell áttenni a következő dobozba a nagyobb sorszámú helyett. Ez nem lényeges különbség. Tulajdonképpen mindig ki kell venni egy követ a nagy dobozból, beletenni az elsőbe, aztán egyet az elsőből a másodikba, és így tovább. Ez lényegében nem más, mintha kivennék egy követ a nagy dobozból, és beletenném az első üres dobozba. Az öreg Merlin nyilván olyan ostobának tart, hogy nem tudom követni bonyolult utasításait, s nem látom át, hogy pontosan mit is kell tennem. Így aztán a törpe örömmel vállalkozott a második feladatra is. Ha egy kicsit jobban tiszteli Merlint, akkor hosszabban elgondolkodik, vajon miért ad neki Merlin ilyen egyszerű feladatot. De magabiztos volt, és nagyon meg akarta szerezni a kristályt. Ismét úgy érvelt,

hogy semmit sem veszthet, még akkor sem, ha hibát vétene. Egy perccel tizenegy előtt tehát nekilátott a munkának. Amikor az óra tizenegyet ütött, a nagy dobozt – elképzelésének megfelelően – üresnek találta. Belepillantott az egyes dobozba, és meglepődve látta, hogy az is üres! Gyorsan megnézte a többi dobozt is. Hát mindegyiket üresen találta! Mind üres volt, az utolsó szálig! A törpe felhördült meglepetésében és felháborodásában. – Hogy lehet üres az összes doboz? Hol vannak a köveim? – Az első kérdésedre egyszerűen válaszolhatok – mondta Merlin. – A nagy doboz ugyanazért üres most is, mint az előző feladat után. Az összes többi doboz pedig azért üres, mert bármelyik követ is tetted valamelyikbe, rövidesen újból kivetted. – De mindig hagytam követ a dobozban! – Ez igaz, de lényegtelen – felelte Merlin. – Gondold csak végig! Vegyük például a k-adik dobozt. Ha maradt volna kő benne, akkor annak volna sorszáma, legyen ez mondjuk n. De ez lehetetlen, hiszen az n-edik követ $1/2^{n+k}$ perccel tizenegy előtt kivetted ebből a dobozból. Így az n-edik kő nem maradhatott a k-adik dobozban. Ez az érvelés bármely doboz és bármely kő esetén érvényes, tehát egyetlen dobozban sem lehet kő. A második kérdésedre pedig csak te tudhatod a választ, hiszen egyedül te rakosgattad a köveidet. A törpe arca elsötétült, mikor rájött, hogy színes kövei valóban eltűntek. De azután hirtelen felragyogott. – Megálltam a két próbát, megoldottam mindkét feladatot! – kiáltotta. – Enyém a kristály! – Nem a tiéd, de nem ám! – válaszolta Merlin. – A feladatokat csakugyan megoldottad, viszont nem maradt egyetlen színes köved sem, amit cserébe adhatnál a kristályért. Csak most értette meg a törpe, hogy miként jártak túl az eszén, és majd megpukkadt a méregtől. – Te ostoba, irigy törpe – mondta neki korholóan Merlin. – A Bölcsesség kövéhez csakis az juthat, aki elég bölcs hozzá. Így bűnhődött az irigy törpe kapzsiságáért és tudatlanságáért.